

Informační a řídicí systémy I. Úvod do Petriho sítí

Pavel Balda
ZČU v Plzni, FAV, KKY

Osnova přednášky

- n Úvod, historie
- n Povolení (enabling) a provedení (firing) přechodu
- n Příklady modelů
- n Vlastnosti
- n Metody analýzy
- n Živost (Liveness), bezpečnost (safeness) a dosažitelnost (reachability)

2

Doporučená literatura

- n [1] Tadao Murata. "Petri nets: Properties, Analysis and Applications." Proc. of the IEEE, 77(4), 1989.
- n [2] Zuravski, R; Zhou, M. "Petri nets and industrial applications: A tutorial." IEEE Trans. on Industrial Electronics, 41(6), 1994.
- n Přednáška zpracována podle [1]

3

Úvod

- n Petriho sítě (PS)
 - n Vhodné pro popis: souběžně probíhajících dějů (concurrent), asynchronních, distribuovaných, paralelních, nedeterministických a/nebo stochastických systémů
 - n Grafický nástroj
 - n Uspadnění vizuální komunikace
 - n Podobnost s vývojovými diagramy a SFC (viz přednášky o normě IEC 61131-3)
 - n Matematický nástroj
 - n Stavové rovnice, algebraické rovnice, a další modely popisující chování systémů
 - n Metodika pro usnadnění komunikace mezi teoretiky a praktiky

4

Historie Petriho sítí

- n 1962: Disertace: Carl Adam Petri (U. Darmstadt, Německo)
- n 1970: Konference projektu MAC na téma: Concurrent Systems and Parallel Computation (MIT, USA)
- n 1975: Konference k Petriho sítím a příbuzným metodám (MIT, USA)
- n 1979: Kurs k obecné teorii sítí procesů a systémů (Hamburg, Německo)
- n 1980: První evropský workshop na téma aplikace a teorie Petriho sítí (Štrasburk, Francie)
- n 1985: První mezinárodní workshop k časovaným Petriho sítím (Turín, Itálie)
- n a mnoho dalších ...






5

Aplikace Petriho sítí

- n Vyhodnocení výkonnosti (performance evaluation) počítačových systémů
- n **Komunikační protokoly**
- n Distribuované programové systémy
- n Distribuované databázové systémy
- n Souběžné (concurrent) and paralelní programování
- n **Průmyslové řídicí systémy**
- n Systémy diskretních událostí
- n multiprocessor memory systems
- n Výpočetní systémy pro zpracování toků dat (dataflow-computing systems)
- n Systémy odolné selháním (fault-tolerant systems)
- n Atd., atd. ...

6

Definice Petriho sítě

- n Orientovaný ohodnocený bipartitní graf
- n Dva typy uzlů:
 - n Místa (places)  – ohodnocena nezáporným počtem značek (tokens) 
 - n Přechody (transitions) 
- n Hrany (arcs) 
 - n Spojují místa s přechody nebo přechody s místy
 - n Každá hrana je ohodnocena celočíselnou vahou udávající násobnost hrany 
- n Počáteční označování
 - n Přiřazení a nezáporného celého čísla každému místu

7

Formální definice Petriho sítě

- n Petriho síť je pětice $PN = (P, T, F, W, M_0)$, kde:
 - n $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ je konečná množina míst (places)
 - n $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ je konečná množina přechodů (transitions)
 - n $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ je množina hran (arcs)
 - n $W : F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ je váhová funkce
 - n $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je počáteční označování
 - n $P \cap T = \emptyset$ a $P \cup T \neq \emptyset$
- n Petriho síť $N = (P, T, F, W)$ bez daného počátečního označování se označuje N
- n Petriho síť s daným počátečním označováním se značí (N, M_0)

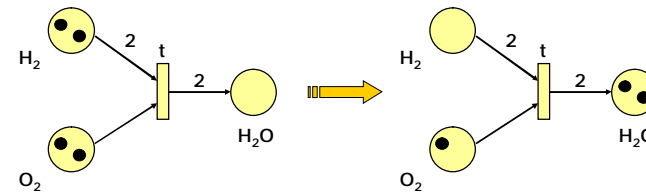
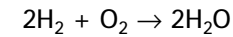
8

Pravidlo (odpálení) přechodu

- n Pravidlo t je **uschopněno** (povoleno, enabled) pokud každé jeho vstupní místo (input place) p má alespoň $w(p,t)$ značek (tokens), kde $w(p,t)$ je váha hrany z p do t
- n Uschopněné pravidlo **může**, ale **nemusí** být **odpáleno** (provedeno, fired)
- n Provedení povoleného pravidla t odstraňuje $w(p,t)$ značek z každého vstupního místa p a přidává $w(t,p')$ značek do každého výstupního místa p' , kde $w(t,p')$ je váha hrany z t do p'

9

Příklad odpálení (provedení) pravidla



10

Další definice

- n **Source transition**: nemá žádná vstupní místa – vždy uschopněn (enabled)
- n **Sink transition**: nemá žádná výstupní místa – při provedení odebere příslušný počet značek (tokens), avšak žádné nevytvoří
- n **Smyčka (self-loop)**: dvojice (p,t) taková, že p je jak vstupním, tak i výstupním místem přechodu t
- n **Čistá (pure) Petriho síť**: neobsahuje žádné smyčky
- n **Obyčejná Petriho síť**: váha každé hrany je 1
- n **Síť s neomezenou kapacitou**: místa mohou kumulovat neomezený počet značek (tokens)
- n **Síť s omezenou kapacitou**: Každé místo p má maximální kapacitu $K(p)$
- n **Přísné pravidlo přechodu**: Takové pravidlo, po jehož odpálení (firing) má každé výstupní místo nejvýše $K(p)$ tokenů
- n **Slabé pravidlo přechodu**: Každé pravidlo, které není přísné

11

Věta o převodu sítě s omezenou kapacitou

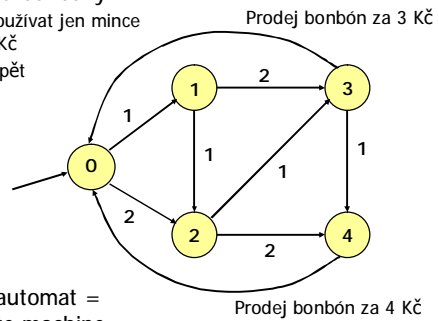
- n **Věta**: Každá čistá Petriho síť s omezenou kapacitou a s přísnými pravidly přechodu může být transformována na ekvivalentní síť s neomezenou kapacitou se slabými pravidly přechodu. Obě sítě jsou ekvivalentní v tom smyslu, že mají shodné množiny všech možných prováděcích posloupností (firing sequences).
- n **Důsledek**: Stačí vyšetřovat síť s neomezenou kapacitou

12

Příklad: Konečný automat

Automat na bonbóny

- možno používat jen mince 1 Kč a 2 Kč
- Nevrací zpět



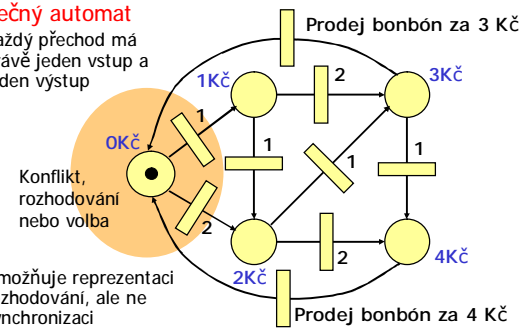
Konečný automat =
Finite-state machine

13

Příklad: Konečný automat pomocí PS

Konečný automat

- Každý přechod má právě jeden vstup a jeden výstup



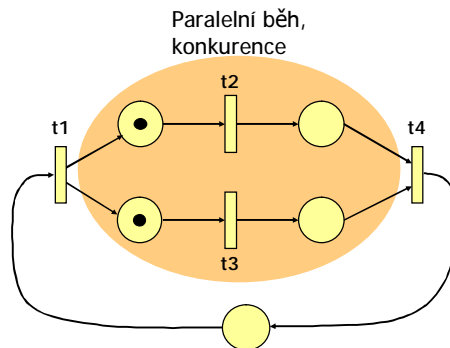
- Umožňuje reprezentaci rozhodování, ale ne synchronizaci paralelních činností

14

Příklad: Modelování paralelních činností

Paralelní běh

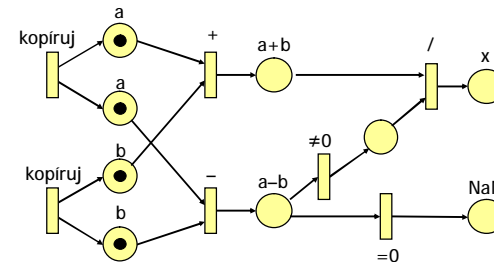
- Paralelní činnosti jsou prováděny odpálením přechodu t1 až po odpálení přechodu t4
- Každé místo na obrázku má právě jednu přichodící a jednu odchozí hranu.
 - Podmnožina Petriho sítě s touto vlastností se někdy nazývá **označovaný graf** (marked graph)



15

Příklad: Modelování postupného výpočtu

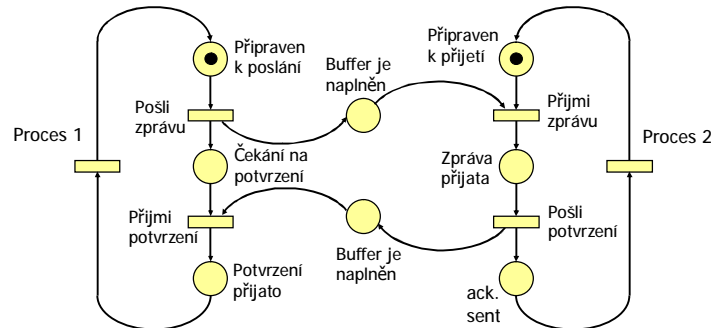
$$x = (a+b)/(a-b)$$



16

Příklad: Jednoduchý komunikační protokol

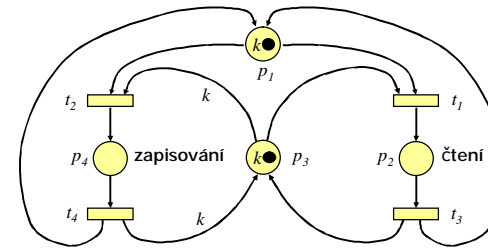
Pro modelování komunikačních protokolů se často používají pojmy **živost** a **bezpečnost** Petriho sítě (viz dále)



17

Příklad: synchronizace zápisu a čtení

- n Jeden proces zapisuje data do sdílené paměti reprezentované místem p_3
- n k procesů může tato data číst



18

Vlastnosti závislé na počátečním označkování (1/3)

- n V angl. literatuře se označují „behavioral properties“
- n **Dosažitelnost (reachability)**
 - n Označkování M_n je dosažitelné z M_0 , pokud existuje posloupnost odpálení, která převádějí M_0 na M_n
 - n Bylo dokázáno, že dosažitelnost je rozhodnutelná, avšak je zapotřebí alespoň exponenciální prostor a čas pro obecný případ!
 - n Označení: $R(M_0)$ – množina všech dosažitelných označkování z M_0 .
 $L(M_0)$ – množina všech přípustných posloupností odpálení z M_0
- n **Omezenost (boundedness)**
 - n Petriho síť je k -omezená (nebo jen omezená), pokud počet tokenů v každém místě nepřekročí konečnou hodnotu k pro jakékoliv značkování dosažitelné z M_0
 - n Petriho síť se nazývá **bezpečná**, je-li 1-omezená

19

Vlastnosti závislé na počátečním označkování (2/3)

- n **Živost (liveness)**
 - n PS je živá (nebo ekvivalentně M_0 je živé označkování) pokud pro každé označkování M dosažitelné z M_0 existuje pro jakýkoliv přechod t značkování M' dosažitelné z M , ze kterého lze t odpálit (t je uschopněný)
 - n Živost je ekvivalentní s neexistencí deadlocku (deadlock-free)
- n Podrobněji je definováno: přechod t v PS (N, M_0) je:
 - n **Mrtvý (L0-živý)**, když t nemůže být odpálen v žádné posloupnosti v $L(M_0)$
 - n **L1-živý** (potenciálně odpalitelný), pokud t může být odpálen alespoň jednou
 - n **L2-živý**, pokud pro dané celé kladné k může být t v nějaké posloupnosti odpálen alespoň k -krát
 - n **L3-živý**, pokud se t vyskytuje nekonečněkrát v nějaké posloupnosti v $L(M_0)$
 - n **L4-živý** nebo živý, je-li L1-živý pro každé označkování M z $R(M_0)$
- n Platí: L4-živost \Rightarrow L3-živost \Rightarrow L2-živost \Rightarrow L1-živost (\Rightarrow je implikace)

20

Vlastnosti závislé na počátečním označování (3/3)

- n **Obratitelnost** (reversibility)
 - n PS je obratitelná, pokud pro každé označování M dosažitelné z M_0 je též M_0 dosažitelné z M
 - n Volnější podmínka – **domovský stav**: označování M' je nazýváno domovským stavem (home state), pokud pro každé označování M dosažitelné z M_0 je M' dosažitelné z M
- n **Pokrytelnost** (coverability)
 - n Označování M je pokrytelné, pokud existuje M' dosažitelné z M_0 takové, že $M'(p) \geq M(p)$ for všechna místa p
- n **Persistence**
 - n PS je persistentní, pokud pro jakékoliv dva uschopněné přechody a odpálení jednoho z nich nezakáže („nezneschopní“) odpálení toho druhého
 - n Tedy, pokud je jednou přechod uschopněn, zůstává uschopněn, dokud není odpálen
 - n Všechny označované grafy (marked graphs) jsou persistentní
 - n Bezpečná persistentní PS může být transformována do označovaného grafu

21

Metody analýzy (1/3)

- n **Strom pokrytelnosti** (coverability tree)
 - n Stromová reprezentace všech přípustných označování
 - n Kořen – M_0
 - n Uzly – označování dosažitelná z M_0
 - n hrany – odpálené přechody
 - n Je-li síť neomezená, je strom udržen konečný zavedením symbolu w
 - n **Vlastnosti**
 - n PS is omezená, právě když se symbol w nevyskytuje v žádném uzlu
 - n PS je bezpečná, právě když se v uzlech vyskytují pouze nuly a jedničky
 - n Přechod je mrtvý, právě když se nevyskytuje v žádné hraně
 - n Je-li M dosažitelné z M_0 , pak existuje uzel M' , který pokrývá M

22

Příklad: konstrukce stromu pokrytelnosti (1/7)

$M_0 = (100)$

23

Příklad: konstrukce stromu pokrytelnosti (2/7)

$M_0 = (100)$

$M_1 = (001)$
"mrtvý konec"

24

Příklad: konstrukce stromu pokrytnosti (3/7)

Diagram showing a Petri net with places p_1, p_2, p_3 and transitions t_0, t_1, t_2, t_3 . The initial marking is $M_0 = (100)$. The tree shows the following nodes:

- $M_0 = (100)$
- $M_1 = (001)$ "mrtvý konec" (reached via t_1)
- $M_3 = (1w0)$ (reached via t_3)

25

Příklad: konstrukce stromu pokrytnosti (4/7)

Diagram showing a Petri net with places p_1, p_2, p_3 and transitions t_0, t_1, t_2, t_3 . The initial marking is $M_0 = (100)$. The tree shows the following nodes:

- $M_0 = (100)$
- $M_1 = (001)$ "mrtvý konec" (reached via t_1)
- $M_3 = (1w0)$ (reached via t_3)
- $M_4 = (0w1)$ (reached via t_1 from M_3)

p3 26

Příklad: konstrukce stromu pokrytnosti (5/7)

Diagram showing a Petri net with places p_1, p_2, p_3 and transitions t_0, t_1, t_2, t_3 . The initial marking is $M_0 = (100)$. The tree shows the following nodes:

- $M_0 = (100)$
- $M_1 = (001)$ "mrtvý konec" (reached via t_1)
- $M_3 = (1w0)$ (reached via t_3)
- $M_4 = (0w1)$ (reached via t_1 from M_3)
- $M_3 = (1w0)$ "starý" (reached via t_3 from M_3)

27

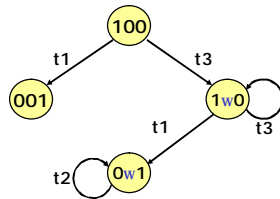
Příklad: konstrukce stromu pokrytnosti (6/7)

Diagram showing a Petri net with places p_1, p_2, p_3 and transitions t_0, t_1, t_2, t_3 . The initial marking is $M_0 = (100)$. The tree shows the following nodes:

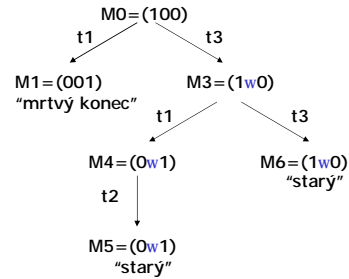
- $M_0 = (100)$
- $M_1 = (001)$ "mrtvý konec" (reached via t_1)
- $M_3 = (1w0)$ (reached via t_3)
- $M_4 = (0w1)$ (reached via t_1 from M_3)
- $M_5 = (0w1)$ "starý" (reached via t_2 from M_4)
- $M_6 = (1w0)$ "starý" (reached via t_3 from M_3)

28

Příklad: konstrukce stromu pokrytelnosti (7/7)



Graf pokrytelnosti



Strom pokrytelnosti

29

Metody analýzy (2/3)

(2/3)

n Incidenční matice A

- n n přechodů, m míst, A je typu $n \times m$
- n $a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^-$, kde
 - $a_{ij}^+ = w(i,j)$ je váha hrany z přechodu i na výstupní místo j
 - $a_{ij}^- = w(j,i)$ je váha hrany do přechodu i ze vstupního místa j
- n a_{ij} udává změnu počtu tokenů v místě j při jednom odpálení přechodu i

n Stavová rovnice (state equation)

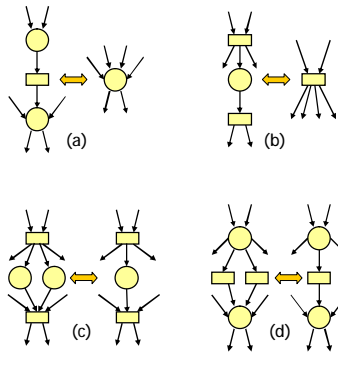
- n $M_k = M_{k-1} + A^T u_k$
- n $u_k = e_i \dots$ jednotkový vektor říkající, že je odpálen přechod i

30

Metody analýzy (3/3)

(3/3)

- n Pravidla pro redukci, která zachovávají živost, bezpečnost a omezenost
 - n Slučování seriových míst (a)
 - n Slučování seriových přechodů (b)
 - n Slučování paralelních míst (c)
 - n Slučování paralelních přechodů (d)
 - n Eliminace míst se smyčkou (e)
 - n Eliminace přechodů se smyčkou (f)
- n Pomáhají čelit složitosti problémů



31

Podtřídy Petriho sítí (1/3)

(1/3)

n Obyčejná (ordinary) PS

- n Všechny hrany mají váhu 1
- n Mají stejnou výkonnost pro modelování jako obecné PS, rozdíl je pouze v efektivitě

n Stavový automat (state machine, SM)

- n Každý přechod má právě jedno vstupní a právě jedno výstupní místo

n Označovaný graf (marked graph, MG)

- n Každé místo má právě jeden vstupní a právě jeden výstupní přechod

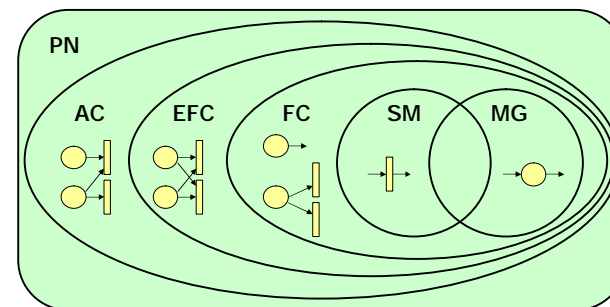
32

Podtřída Petriho sítí (2/3)

- n **Free-choice PS (FC)**
 - n Každá výstupní hrana z místa je buď jediná (unique) hrana z daného místa nebo je jedinou vstupní hranou do nějakého přechodu
- n **Rozšířené free-choice PS (EFC)**
 - n Mají-li dvě místa nějaký společný výstupní přechod, pak mají všechny výstupní přechody společné
- n **Asymmetric choice (simple) PS (AC)**
 - n Mají-li dvě místa nějaký společný výstupní přechod, pak jedno z nich má všechny výstupní přechody toho druhého (a může jich mít více)

33

Podtřída Petriho sítí (3/3)



34

Nutná podmínka dosažitelnosti

- n Je-li M_d dosažitelné z M_0 po d odpáleních, pak je

$$M_d = M_0 + A^T (u_1 + u_2 + \dots + u_d),$$

což lze přepsat na

$$A^T x = \Delta M, \text{ kde } \Delta M = M_d - M_0$$

then

$$\Delta M \in \text{range}(A^T)$$

$$\Delta M \perp \text{null}(A)$$

$$B_f \Delta M = 0$$

where the rows of B_f span $\text{null}(A)$

35